

§ 1. Abbildungen

Wir beginnen mit der Klärung des Abbildungsbegriffes.

(1.1) DEF: M und N seien nichtleere Mengen. Eine **Abbildung** f von M nach N (in Zeichen: $f : M \longrightarrow N$) ordnet jedem Element aus M genau ein Element aus N zu.

Bezeichnungen: Ist $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung, so heißt M der **Definitionsbereich von f** und N der **Wertebereich von f** .

Wird dem Element $x \in M$ durch f das Element y aus N zugeordnet, so nennt man y den **Bildwert von x unter f** und schreibt $y = f(x)$ oder $x \longmapsto y$.

Ist y ein Element aus N , so heißt jedes Element $x \in M$ mit $y = f(x)$ ein **Urbild von y unter f** .

(1.2) BEISPIELE: b) Ist M eine nichtleere Menge, so heißt die Abbildung $\text{id}_M : M \longrightarrow M, x \longmapsto x$, die **identische Abbildung auf M** .

(1.3) DEF: Zwei Abbildungen $f : M \longrightarrow N$ und $g : M' \longrightarrow N'$ heißen **gleich** (in Zeichen: $f = g$), wenn gilt

1) $M = M'$ 2) $N = N'$ 3) $f(x) = g(x)$ für alle $x \in M$.

Achtung: Sind $f, g : M \longrightarrow N$ zwei Abbildungen mit demselben Definitionsbereich und demselben Wertebereich, so gilt:
 $f \neq g \iff$ es gibt ein $x_0 \in M$ mit $f(x_0) \neq g(x_0)$.



(1.4) DEF: Sind $f : M \longrightarrow N$ und $g : N \longrightarrow P$ Abbildungen, so ist die Abbildung $g \circ f : M \longrightarrow P$ definiert durch

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad (\text{für alle } x \in M)$$

$g \circ f$ heißt die **Hintereinanderausführung** (oder **Verkettung**) von f und g .

Achtung: $g \circ f$ ist nur definiert, wenn der Wertebereich von f mit dem Definitionsbereich von g übereinstimmt. $g \circ f$ wird gebildet, indem zuerst f und dann g ausgeführt wird.



(1.5) SATZ: a) Für Abbildungen $f : M \longrightarrow N$, $g : N \longrightarrow P$ und $h : P \longrightarrow Q$ gilt
$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

d.h. es gilt das **Assoziativgesetz** für die Hintereinanderausführung von Abbildungen.

- b) Für Abbildungen $f, g : M \longrightarrow N$ gilt nicht notwendig $g \circ f = f \circ g$, d.h. das **Kommutativgesetz** gilt i.a. **nicht** für die Hintereinanderausführung von Abbildungen.
- c) Ist $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung, so gilt $f \circ \text{id}_M = f$ und $\text{id}_N \circ f = f$.

(1.6) DEF: Eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ heißt **injektiv**, wenn jedes Element aus N höchstens ein Urbild unter f in M besitzt.

(1.7) SATZ: Kriterium für die Injektivität

Für eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) f ist injektiv
- b) Für alle $x, x' \in M$ mit $x \neq x'$ folgt $f(x) \neq f(x')$
- c) Für alle $x, x' \in M$ mit $f(x) = f(x')$ folgt $x = x'$.

Achtung: Für eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ gilt automatisch

für alle $x, x' \in M$ mit $x = x'$ folgt $f(x) = f(x')$,

da eine Abbildung durch eine eindeutige Zuordnungsvorschrift definiert ist.



(1.8) SATZ: Für Abbildungen $f : M \longrightarrow N$ und $g : N \longrightarrow P$ gilt:

- a) Sind f und g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.
- b) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch f injektiv.
- c) Ist $g \circ f$ injektiv, so muß g nicht injektiv sein.

(1.9) DEF: Eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ heißt **surjektiv**, wenn jedes Element aus N mindestens ein Urbild unter f in M besitzt.

(1.10) SATZ: Kriterium für die Surjektivität

Für eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) f ist surjektiv
- b) Zu jedem $y \in N$ gibt es mindestens ein $x \in M$ mit $y = f(x)$.

(1.11) SATZ: Für Abbildungen $f : M \longrightarrow N$ und $g : N \longrightarrow P$ gilt:

- a) Sind f und g surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.
- b) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist auch g surjektiv.
- c) Ist $g \circ f$ surjektiv, so muß f nicht surjektiv sein.

(1.12) DEF: Eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ heißt **bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

(1.13) SATZ: Kriterium für die Bijektivität

Für eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) f ist bijektiv
- b) Jedes Element aus N besitzt unter f genau ein Urbild in M
- c) zu jedem $y \in N$ gibt es genau ein $x \in M$ mit $y = f(x)$.

(1.14) SATZ: Für Abbildungen $f : M \longrightarrow N$ und $g : N \longrightarrow P$ gilt:

- a) Sind f und g bijektiv, so ist auch $g \circ f$ bijektiv.
- b) Ist $g \circ f$ bijektiv, so ist f injektiv und g surjektiv.
- c) Ist $g \circ f$ bijektiv, so müssen f oder g nicht bijektiv sein.

(1.15) SATZ: $f : M \longrightarrow N$ sei eine bijektive Abbildung. Dann gilt:

- a) Es gibt eine Abbildung $g : N \longrightarrow M$, die durch die Vorschrift

$$y \in N : g(y) = x \in M : \iff f(x) = y$$

definiert ist (d.h. g bildet ein Element $y \in N$ auf das eindeutig bestimmte Urbild von y unter f ab).

- b) $g \circ f = \text{id}_M$ und $f \circ g = \text{id}_N$
- c) Ist $h : N \longrightarrow M$ eine Abbildung mit der Eigenschaft $h \circ f = \text{id}_M$ und $f \circ h = \text{id}_N$, so folgt $h = g$.

(1.16) FOLGERUNG: Für eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) f ist bijektiv
- b) Es gibt eine Abbildung $g : N \longrightarrow M$ mit der Eigenschaft $g \circ f = \text{id}_M$ und $f \circ g = \text{id}_N$.

(1.17) DEF: Ist $f : M \longrightarrow N$ eine bijektive Abbildung, so heißt die eindeutig bestimmte Abbildung $g : N \longrightarrow M$ mit $g \circ f = \text{id}_M$ und $f \circ g = \text{id}_N$ die **Umkehrabbildung** von f .

Bezeichnung: $g = f^{-1}$.

Achtung: Nur eine bijektive Abbildung besitzt eine Umkehrabbildung.

(1.18) SATZ: a) Die identische Abbildung $\text{id}_M : M \longrightarrow M$ ist bijektiv, und es gilt $\text{id}_M^{-1} = \text{id}_M$.

b) Sind $f : M \longrightarrow N$ und $g : N \longrightarrow P$ bijektive Abbildungen, so ist auch die Hintereinanderausführung $g \circ f$ bijektiv, und es gilt

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Achte auf die Reihenfolge!

c) Ist die Abbildung $f : M \longrightarrow N$ bijektiv, so ist auch die Umkehrabbildung $f^{-1} : N \longrightarrow M$ bijektiv, und es gilt

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

(1.19) SATZ: Für eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) f ist injektiv
- b) Es gibt eine Abbildung $g : N \longrightarrow M$ mit der Eigenschaft $g \circ f = \text{id}_M$.

(1.20) SATZ: Für eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) f ist surjektiv
- b) Es gibt eine Abbildung $h : N \longrightarrow M$ mit der Eigenschaft $f \circ h = \text{id}_N$.

Für eine endliche Menge M bezeichne $|M|$ die Anzahl der Elemente von M . Es gilt $|\emptyset| = 0$, und die leere Menge ist die einzige Menge mit 0 Elementen. Wir betrachten im folgenden nur **nichtleere** endliche Mengen.

(1.21) SATZ: M und N seien endliche Mengen, und $f : M \longrightarrow N$ sei eine Abbildung. Dann gilt:

- a) Ist $f : M \longrightarrow N$ injektiv, so folgt $|M| \leq |N|$
- b) Ist $f : M \longrightarrow N$ surjektiv, so folgt $|M| \geq |N|$
- c) Ist $f : M \longrightarrow N$ bijektiv, so folgt $|M| = |N|$.

(1.22) SATZ: M und N seien endliche Mengen mit $|M| = |N|$, und $f : M \longrightarrow N$ sei eine Abbildung. Dann gilt:

- a) Ist $f : M \longrightarrow N$ injektiv, so folgt, daß f bijektiv ist
- b) Ist $f : M \longrightarrow N$ surjektiv, so folgt, daß f bijektiv ist.

(1.23) SATZ: M und N seien endliche Mengen. Dann ist die Anzahl aller Abbildungen von M nach N gleich

$$|N|^{|M|}.$$

(1.24) SATZ: M und N seien endliche Mengen mit $|M| = |N|$. Dann ist die Anzahl aller bijektiven Abbildungen von M nach N gleich

$$|M|! \quad (|M|\text{-Fakultät}).$$

Für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist $n!$ (lies: **n-Fakultät**) definiert als das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis n , d.h.

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$